

中学生文库精选续编

初步

矩阵对策

数学趣谈辑

张盛开 编著



上海教育出版社

数学

ZHONGXUESHENGWENKU

HONGXUESHENG

趣谈 辑

WENKUJINGXUA



数学趣谈辑

数学探奇
矩阵对策初步
生物数学趣谈
形形色色的曲线
世界数学名题选
SOS-编码纵横谈
棋盘上的数学
运动场上的数学



ISBN 7-5320-6344-5/G·6499

定价:2.90 元



中学生文库精选续编

数学趣谈辑

张盛开 编著

初步

矩阵对策



上海教育出版社

责任编辑:韩希塘

封面设计:王志伟

中学生文库精选续编·数学趣谈辑
矩阵对策初步

张盛开 编著

上海世纪出版集团

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1.75 插页 2 字数 37,000

1999年12月第2版 1999年12月第1次印刷

印数:1-5,150本

ISBN 7-5320-6344-5/G·6499 定价:2.90元

目 录

引言	1
一、问题的提出	2
二、矩阵对策的数学模型	5
三、混合扩充	14
四、一种求解的简便方法	27
五、线性规划法	40
六、矩阵对策的图解法	44
练习题	48

引言

早在1912年, E. Zermelo 用集合论的方法研究过下棋, 他著有《关于集合论在象棋对策中的应用》。之后, 法国数学家 Borel 在1921年, 也研究过下棋时的一些个别现象, 并且引入了“最优策略”的概念。本世纪四十年代以来, 由于生产与战争的需要, 运筹学的各学科纷纷出现。特别是战争中兵力的调动、兵力部署、监视对方、侦察对方兵器等活动, 迫切要求战争的指挥者拿出最好方案, 用已有的条件去取得较大的胜利, 于是对策论的数学模型很快形成了。当时, 各参战国组织了大批科学家参加这项研究工作。

1944年, J. von Neumann 和 O. Morgenstern 把这一工作提高到一个新水平。他们合著了《对策论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior)。从此, 对策论的研究才系统化与公理化。

矩阵对策, 是整个对策论的研究基础。不管是理论研究, 还是生产实践, 都不能越过矩阵对策这一个“第一道大门”。近代对策论的研究, 其结果再深入, 也无法摆脱矩阵对策这样一个母体。矩阵对策又以研究二人对策为主题, 策略的选取主要是研究有限情况。

我国劳动人民很早就认识了对策的问题, 虽然没有完整的数学体系, 没得出一套完整的数学方法, 然而这种模型早就出现了。所谓的“齐王赛马”就是一个非常典型的例子; 再如, 很早就出现了“棋谱”, 也都是研究对策的萌芽, 只不过没有系

统化和数学化罢了。

近几年来,对策论发展很快。例如,随机微分对策,就被应用到航天技术上。当然,对策论的某些理论上的研究成果,目前在生产与技术方面还用不上(在矩阵对策里,这种现象较少;在无穷对策中就很多,例如列紧对策,生产上就不易找到应用的模型)。尽管如此,对策论的研究并未因此而受到影响,相反,由于理论上这部分内容较完整,因而发展的速度更快,甚至研究出了不少新的意想不到的成果。

一、问题的提出

日常生活中,我们可以看到一些相互之间的竞争、比赛性质的现象,如下棋、打扑克和球类比赛等等。竞争的双方都各有长处,各自都有一些不足,又各有特点。在竞赛的过程中,双方都在想方设法发挥自己的长处,尽最大可能争取竞赛后的较好的结果。

除了上述体育比赛外,军事上,战争也可以看成是竞争,是一种你死我活的斗争。此外,还有些现象也可以看成是一种竞争。如在运输方面,由于运输工具的不同,能够服务的项目也不同,从而创造的价值也就不同。作为生产指挥者,在安排时,必然是希望充分发挥现有运输能力,最大限度地减少消耗,去争取创造最大的价值。

在这里,运输的指挥者(或运输部门)看成是竞赛的一方,而被服务的单位可看成是竞赛的另一方。对被服务单位来说,他们希望付出较少的代价,得到较满意的服务。

再如,在工业生产方面,工厂中拥有一定数量的设备,能

加工不同类型的产品。不同设备单位时间内创造的价值不一样,消耗也不一样。从企业管理的角度来看,就是如何充分发挥其设备能力,减少消耗,去争取创造最多的价值。

在这里,工厂指挥者可看成是一方,自然现象的消耗、成本损失等看成是另一方。这样,两者之间也可以看成是一种竞争现象。

诸如此类的问题还很多,在农业方面,如合理施肥、农药除虫等方面,都有类似的问题。

形形色色的竞争现象中,可以抽象出哪几个本质的东西呢?

1. 首先,竞争总得有对立面。例如象棋比赛中,对奕的两位象棋运动员即是比赛的对立面(或称为“对手”);一场战争中,交战的双方就是斗争的对立面;生产斗争中,常常是人类和大自然成了对立面,等等。我们把介入竞争的对立面,称为局中人。

2. 各局中人在竞争中总希望取得尽可能大的胜利,谁也不希望自己失败,至少不要败得很惨。这样,各方都在想方设法选择对付对手的“办法”,或说是选取一种“着法”,我们把这种“办法”(或“着法”)称为策略。

这里所谓策略,是指局中人在整个竞争过程中的对付对手的办法,并不是指竞争中某一步所采用的办法。如在下象棋中,“当头炮”只是作为一个策略的一个组成部分,并非一个策略。

局中人的一切可能的策略,组成该局中人的策略集合。本书中,只讨论策略集合中含有限个策略的情况。

3. 竞争的结局,或是表现为胜负(输赢),或是表现为得失。这种结局称为一种“赢得”(或“支付”)。

这种竞争现象正是对策论所要研究的，称为对策现象，而上述三点则为对策的三要素。

当然，为了得到一种较好的结局，局中人如何选取策略是很重要的，下面以“齐王赛马”为例加以说明。

战国时期，齐国的国王与国内一个名叫田忌的大将进行赛马。双方约定，各自出三匹马，分别为三个等级的——即一等马（好的）、二等马（中等的）、三等马（差的）各一匹。比赛时，每次双方各从自己的三匹马中任选一匹来比，输者得付给胜者一千两黄金，一回赛三次，每匹马都参加。这里，局中人自然是齐王和田忌，两局中人的策略集合则为各自三等级马的全排列，结局是某一局中人赢得黄金一千两或三千两。

当时，三种不同等级的马相差非常悬殊，而同等级的马中，齐王的马比田忌的马要强。这样，如果齐王和田忌都是一、二、三等马依次参赛的话（即策略同为：一等马先参赛，其次二等马参赛，最后三等马参赛），田忌就得输三千两黄金。这时，田忌的朋友给他出了个主意，让田忌用三等马去与齐王的一等马比赛，一等马对齐王的二等马，二等马对齐王的三等马。即田忌的策略是三等马先参赛，一等马次之，二等马最后，用以对付齐王的一、二、三等依次参赛。这样，结局是齐王非但没有赢得，反而输了一千两黄金。这个例子说明，局中人选取一个好策略至关重要。至于这种好策略是否能找得到？运用什么方法去找？这都是对策论里所要解决的问题，本书也将适当予以介绍。

下面再介绍几个概念：

从上述提出的问题来看，不管是赛球、下棋（可以是象棋，也可以是国际象棋），还是齐王赛马，这种双方竞争的对策称为二人对策。在二人对策中，一个局中人的赢得等于另一局

中人的输出时,称这类二人对策为二人零和对策,赢得的数字称为对策的值。例如,在上述齐王赛马的例子中,每当齐王赢得一千两黄金时,就可看成是他的赢得为+1,这时田忌的赢得看成是-1;如果齐王输了一千两黄金,就看成它的赢得为-1,这时田忌的赢得为+1。于是,在对策的结局,双方的赢得之和等于零。这就是“零和”对策称呼的来历。

二、矩阵对策的数学模型

我们继续来讨论齐王赛马的例子。以 $\alpha_1(1, 2, 3)$ 表示齐王先用一匹马,再用二匹马,最后用三匹马参赛。于是,齐王共有如下六个策略:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1, 2, 3), \quad \alpha_2(1, 3, 2), \\ &\alpha_3(2, 1, 3), \quad \alpha_4(2, 3, 1), \\ &\alpha_5(3, 2, 1), \quad \alpha_6(3, 1, 2); \end{aligned}$$

同理,田忌也有六个策略:

$$\begin{aligned} &\beta_1(1, 2, 3), \quad \beta_2(1, 3, 2), \\ &\beta_3(2, 1, 3), \quad \beta_4(2, 3, 1), \\ &\beta_5(3, 2, 1), \quad \beta_6(3, 1, 2). \end{aligned}$$

齐王的策略集合 S_1 含有六个元素,记为:

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\};$$

田忌的策略集合 S_2 也含有六个元素,记为:

$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6\}.$$

列一个表,表示齐王的赢得(单位:千两黄金):

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	3	1	1	1	1	-1
α_2	1	3	1	1	-1	1
α_3	1	-1	3	1	1	1
α_4	-1	1	1	3	1	1
α_5	1	1	-1	1	3	1
α_6	1	1	1	-1	1	3

如果只考虑数字表,写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

在数学中,这可以看成是一个矩阵^①.由于它是齐王赢得表中的数字依次抽象出来的,所以这个矩阵可称为齐王的赢得矩阵.对于二人零和对策,局中人I的赢得矩阵给定后,两局中人就

① 将 $m \times n$ 个数字 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ 排成 m 行(横排是“行”)、 n 列(纵排是“列”)的矩形表:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 m 行 n 列的矩阵,可以简记成 $A = (a_{ij})$, 其中 $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$. 也可以记成 $A_{m \times n}$.

对于两个矩阵 $A_{m \times n} = (a_{ij})$ 、 $B_{m \times n} = (b_{ij})$, 当且仅当所有的元素对应相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ 时, 才认为这两个矩阵是相等的: $A = B$.

便于各自考虑选取最优策略,以谋取最大的赢得。

为了表述方便,以后,当我们给定一个对策时,如果局中人 I 的策略集合记为 S_1 ,局中人 II 的策略集合记为 S_2 ,局中人 I 的赢得矩阵是 A ,这时我们把这个对策记为 Γ ,具体的写为

$$\Gamma = \{I, II; S_1, S_2, A\} \quad \text{或} \quad \Gamma = \{S_1, S_2, A\}.$$

有限二人零和对策又称为矩阵对策。

下面,我们通过几个再简单些的例子,用以说明如何来选取最优策略。

[例 1] 对于一个矩阵对策 $\Gamma = \{I, II; S_1, S_2, A\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\},$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

求双方的最优策略,并求对策的值?

解 由 A 可以看出,局中人 I 的最大赢得是 9,就是说局中人 I 总希望自己取得 9,就得出 α_3 参入对策。然而,局中人 II 也是在考虑,因为局中人 I 有出 α_3 的心理状态,于是局中人 II 就想出 β_3 参入对策,这样不仅不能使 I 得到 9,反而得输 10 (即赢得 -10)。同样, I 也会这样想, II 有出 β_3 的心理状态,于是 I 就会出 α_4 , 结果 II 不但得不到 10,反而要输 6。

这样一来,双方都必然要考虑,不冒风险,考虑到对方会设法使自己得到最小收入。所以就应当从最坏的方案中着手,去争取最好的结果。

对于局中人 I 来说,所有最坏的结果,即 A 中每一行的

最小数分别是:

$$-8, 2, -10, -3,$$

在这些最坏的情况中,最好的结果又是 2. 于是,局中人 I 要是出 α_2 参加对策,至少可以保证收入不会少于 2. 同样道理,对于局中人 II 来说,所有最坏的结果(即 A 中每一列的最大数,也是最多输掉的数)分别是:

$$9, 2, 6,$$

这些最坏的结果中,最好的结果(输得最小)是 2. 于是,局中人 II 要是出 β_2 参加对策,那么它最多输 2.

这就是说,局中人 I 的最优策略是 α_2 , 局中人 II 的最优策略是 β_2 ; 数值 2 就是对策 I^* 的值: $V_I = 2$.

把例 1 的求解过程用数学式子写出来,就是:从每一行里求出最小数,可写成

$$\min\{-6, 1, -8\} = -8,$$

$$\min\{3, 2, 4\} = 2,$$

$$\min\{9, -1, -10\} = -10,$$

$$\min\{-3, 0, 6\} = -3;$$

再从这些最小的数中取最大的,可写为

$$\max\{-8, 2, -10, -3\} = 2.$$

对于局中人 II 来说,从每一列里取最大的,可写为

$$\max\{-6, 3, 9, -3\} = 9,$$

$$\max\{1, 2, -1, 0\} = 2,$$

$$\max\{-8, 4, -10, 6\} = 6;$$

再从这些最大的数中取最小的,就是

$$\min\{9, 2, 6\} = 2.$$

一般地,如果对策 I^* 的赢得矩阵 A 为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对局中人 I 来说, 对 A 的每一行取其中的最小值 $\min_j a_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 再从这些最小值中取最大值, 得

$$\max_i \min_j a_{ij};$$

对局中人 II 来说, 对 A 的每一列取其中的最大值 $\max_i a_{ij}$ ($j=1, 2, \dots, n$), 再从这些最大值中取最小值, 得

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

如果

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*, j^*},$$

则 α_{i^*} 、 β_{j^*} 分别为局中人 I、II 的最优策略, 且这一对策的值 V_I 即为

$$V_I = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

为了表述方便, 对于局中人 I 用 α_i , 局中人 II 用 β_j 进行对策, 我们称 (α_i, β_j) 为一个局势. 对于能使

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

的 α_{i^*} 、 β_{j^*} 构成的局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 称为对策的解, 而 α_{i^*} 、 β_{j^*} 分别称为局中人 I 与 II 的最优纯策略. 显然, 在例 1 中, 对策的解为 (α_2, β_2) , 对策的值为 $V=2$.

[例 2] 设有一个矩阵对策, 局中人 I 的赢得矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求双方的最优纯策略, 并求对策的值.

解 首先求出

$$\max_i \min_j a_{ij} = 1,$$

再求出

$$\min_j \max_i a_{ij} = 1,$$

由于 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{12} = 1$, 所以局中人 I 的最优纯策略是 α_1 , 局中人 II 的最优纯策略是 β_2 , 对策的值 $V=1$.

下面再来看一个实例.

[例 3] 山东省济南市东郊人民公社计划种茄子、辣椒、大葱、大白菜等十一种蔬菜, 种植面积为 1300 亩, 但感到水、肥均不足, 根据各种蔬菜的收获量及市场价格, 应怎样安排各种蔬菜的种植面积, 使既能满足市场供应, 又保证公社能获得最大的收入.

解 首先, 把问题适当简化, 以利归结为一个数学问题. 我们可以把水分成两种情况: 足与不足, 把肥分成三种情况: 足够、稍缺、甚缺, 这样投入每一块田的水、肥结合起来便有六种不同情况. 另外, 根据市场实际需要和种植情况, 将各种蔬菜的种植面积分成五种不同方案, 并按市价算出总收入数字 (单位: 元) 列成下表:

方 案	自 然 条 件					
	一	二	三	四	五	六
甲	192460	235120	278200	156360	197520	242840
乙	189560	231700	273630	155620	196600	239710
丙	192060	234799	277095	158235	198580	243280
丁	194370	237218	280751	158475	199813	245362
戊	194360	238990	281385	157835	199750	246020

这就把问题归结为二人零和对策,局中人分别为人和大自然,人有五种策略,大自然有六种策略,把上表数字抽象出来就是人的赢得矩阵.

上述赢得矩阵 $A = (a_{ij})$ 是一个有五行、六列的矩阵,可求得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 158475,$$

即采用方案丁,其总收入决不少于 158475 元,而有达到 280751 元的希望.

[例 4] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵是

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

由于

$$\min_j a_{1j} = 5, \min_j a_{2j} = -1, \min_j a_{3j} = 5, \min_j a_{4j} = 0.$$

在这些最小中去取最大,有

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i^*j^*} = 5, \quad i^* = 1, 3; \quad j^* = 2, 4.$$

又由于

$$\max_i a_{i1} = 8, \max_i a_{i2} = 5, \max_i a_{i3} = 7, \max_i a_{i4} = 5.$$

在这些最大中去取最小,是

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 5, \quad i^* = 1, 3; \quad j^* = 2, 4.$$

显然有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 5.$$

故 (α_1, β_2) 、 (α_3, β_4) 、 (α_1, β_4) 、 (α_3, β_2) 四个局势都是对策 Γ 的解,即

$$(\alpha_1, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_2) = (\alpha_3, \beta_4) = (\alpha_3, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_4).$$

由例 4 可以看到, 对策的解可以不唯一, 当然它的值是唯一的.

对于例 4 这样的对策, 当对策的解不唯一时, 它有两条重要性质:

1. 无差别性. 即 (α_1, β_2) 与 (α_3, β_4) 是两个解, 那末也有

$$a_{12} = a_{34}.$$

一般说来, (α_i, β_j) , (α_k, β_l) 是两个解, 那末也有

$$a_{ij} = a_{kl}.$$

2. 可换性. 由于 (α_1, β_2) , (α_3, β_4) 是两个解, 那末 (α_1, β_4) 与 (α_3, β_2) 也都是解. 一般说来, 若 (α_i, β_j) , (α_k, β_l) 是两个解, 那末 (α_i, β_l) 与 (α_k, β_j) 也都是对策的解.

最后, 我们来讨论, 是否只要给定一个对策 Γ , 就一定有解呢? 上述例 1~例 4 都是有解的, 但也有没有解的对策. 例如, 前述齐王赛马的对策, 便是没有解的, 因为在齐王的赢得矩阵 A 中, 可以算出

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = 3,$$

显然, 这里的

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}.$$

所以, 齐王赛马的对策中, 双方没有最优纯策略.

什么情况下给定的对策有解呢?

定理 对策 $\Gamma = \{I, II; S_1, S_2, A\}$ 有解的充分必要条件是: 存在一个纯局势 (α_i, β_j) , 对一切 $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$, 都有

$$a_{ij} \leq a_{i^0 j^0} \leq a_{i^0 j}.$$

证明 先证充分性. 由于对一切 i, j 均有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j},$$

故有

$$\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j},$$

而

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*},$$

$$\min_j a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij},$$

从而可得

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \min_j a_{ij}.$$

另外, 显然有^①

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

将上两式比较, 即得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*},$$

这就证明了对策 Γ 有解 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$, 且其值为 $a_{i^*j^*}$.

现在来证明必要性. 既然对策 Γ 有解, 假设 $\min_j a_{ij}$ 在 $i = i^*$ 时达到最大, $\max_i a_{ij}$ 在 $j = j^*$ 时达到最小, 即

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j},$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*},$$

而

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

从而有

$$a_{i^*j^*} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} \geq a_{i^*j};$$

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j}.$$

① 对于矩阵 $A = (a_{ij})$, 显然有 $\min_j a_{ij} \leq a_{ij}$, 从而 $\max_i \min_j a_{ij} \leq \max_i a_{ij}$. 由于上式右端包括了一切 j , 所以也有 $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$.

这就证得了

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

对一切 $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 成立. 定理完全得证.

三、混合扩充

前已指出, 如齐王赛马的例子, 就是一个没有解的对策. 再如下面的例子, 也是一个没有解的对策.

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3,$$

故不满足 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, 因而 Γ 没有解, 局中人 I 与 II 也就没有最优纯策略.

对于这种没有解的对策, 局中人又应如何选取策略参加对策呢? 这就得估计选取各个策略可能性的大小来进行对策. 数学中, 把这种可能性大小用一个数字来表示, 称为概率. 例如, 以 30% 的可能性选取某个策略, 我们就说它以概率 $\frac{30}{100} = 0.3$ 选取某个纯策略.

对于例 1 来说, 假定局中人 I 以概率 x 选取纯策略 α_1 , 以概率 $1-x$ 选取 α_2 . 局中人 II 以概率 y 选取纯策略 β_1 , 以概率 $1-y$ 选取纯策略 β_2 . 于是, 对于局中人 I 来说, 他的期望赢得应当是

$$\begin{aligned}
 E(x, y) &= 1 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x \cdot (1-y) \\
 &\quad + 4 \cdot (1-x) \cdot y + 2 \cdot (1-x) \cdot (1-y) \\
 &= -4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

由上式可见, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $E(x, y) = \frac{5}{2}$. 就是说, 当局中人 I 以概率 $\frac{1}{2}$ 选纯策略 α_1 , 他的赢得至少是 $\frac{5}{2}$. 但是, 他并不能保证他的期望值超过 $\frac{5}{2}$. 这也是因为局中人 II 当取 $y = \frac{1}{4}$ 时, 会控制局中人 I 的赢得又不会超过 $\frac{5}{2}$. 因此, $\frac{5}{2}$ 是 I 的期望值. 同样, 局中人 II 只有取 $y = \frac{1}{4}$ 时, 才能保证他的输出不会多于 $\frac{5}{2}$. 于是, 对于例 1 来说, 局中人 I 分别都以概率 $\frac{1}{2}$ 选取 α_1 与 α_2 , 局中人 II 分别以概率 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{3}{4}$ 选取 β_1 与 β_3 , 这时对策的双方都会得到满意的结果. 以这样一种方式选取策略参加对策, 是双方的最优策略.

从刚才计算的结果, 也可看出:

$$E\left(x, \frac{1}{4}\right) \leq E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \leq E\left(\frac{1}{2}, y\right).$$

这里, 如果把 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 看成是一个局势, 显然, 与第 12 页定理中的充要条件是一致的.

把刚才解例 1 的方法推广到一般, 我们引出如下概念:

定义 设给定一个矩阵对策

$$\Gamma = \langle I, II; S_1, S_2, A \rangle,$$

其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}, S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\},$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

我们把纯策略集合对应的概率向量

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

与

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), y_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

分别称为局中人 I 与 II 的混合策略.

这里, x_i 看成是 I 选取 α_i 的概率; 同理, y_j 看成是 II 选取 β_j 的概率.

在纯策略情况下, 对策的解可以看成是局中人以概率为 1 去选取某个纯策略.

为了方便, 我们把这种混合策略也简称为策略.

如果局中人 I 选取的(混合)策略为 \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

局中人 II 选取的(混合)策略为 \mathbf{Y} ,

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

时, 值

$$E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

称为局中人 I 的赢得, 并叫做数学期望值; 而 (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) 称为混合局势.

类似地, 当存在 $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$, 使

$$E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^*) \leq E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) \leq E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y})$$

对一切 \mathbf{X} 与 \mathbf{Y} 成立, 我们就称 $\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*$ 分别是局中人 I 与 II 的最优(混合)策略; $E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ 称为对策在混合意义下的值(也简称为对策的值); $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ 称为对策的解.

局中人 I 的所有混合策略的全体构成一个集合 S_1^* , 局中人 II 的所有混合策略的全体构成集合 S_2^* . 那么, 以 S_1^* 与 S_2^* 为策略集合的对策, 叫混合扩充, 即把对策

$$\Gamma^* = \langle I, II; S_1^*, S_2^*; E \rangle$$

称为对策 $\Gamma = \langle I, II; S_1, S_2; A \rangle$ 的混合扩充。同样，如果成立：

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = V,$$

值 V 叫做对策 Γ 的值。

矩阵对策混合扩充一定有解 (X^*, Y^*) 。 X^* 与 Y^* 分别称为局中人 I 与 II 的最优策略。

定理 如果矩阵对策 Γ 的值是 V ，那末以下两组不等式的解就是局中人 I 与 II 的最优策略：

$$1^\circ \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq V, \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

$$2^\circ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq V, \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

这个定理的证明较繁，本书从略，以下通过例题来说明该定理的应用。

[例 2] 给定一个矩阵对策 Γ ，其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值。

解 假设局中人 I 以概率 x_1, x_2 与 x_3 分别选取 α_1, α_2 与 α_3 ；局中人 II 以概率 y_1, y_2 与 y_3 分别选取 β_1, β_2 与 β_3 。于是，问题化为要解如下的两组不等式组

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq V, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \geq V, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \geq V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, i=1, 2, 3. \end{cases}$$

以及

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 \leq V, \\ y_1 + y_2 + 5y_3 \leq V, \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \leq V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, j=1, 2, 3. \end{cases}$$

为解 1° 与 2° , 我们先取等号, 看看是否可解出这两组方程来.

对于 1° , 取等号得线性方程组, 解得:

$$x_1 = \frac{-12}{-50} V = \frac{6}{25} V,$$

$$x_2 = \frac{-8}{-50} V = \frac{4}{25} V,$$

$$x_3 = \frac{-6}{-50} V = \frac{3}{25} V.$$

再利用 x_1, x_2 与 x_3 是概率, 和为 1, 可知

$$\frac{1}{25} (6+4+3) V = 1,$$

从而应有

$$V = \frac{25}{13}.$$

进一步, 代入 x_1, x_2, x_3 关于 V 的表达式中, 可求得

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{4}{13}, \quad x_3 = \frac{3}{13}.$$

同理,

$$y_1 = \frac{-12}{-50} V = \frac{6}{25} V = \frac{6}{13},$$

$$y_2 = \frac{-6}{-50} V = \frac{3}{25} V = \frac{3}{13},$$

$$y_3 = \frac{-8}{-50} V = \frac{4}{25} V = \frac{4}{13}.$$

解出了 1° 与 2° 后, 可知局中人 I 的最优策略为

$$X^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13} \right);$$

局中人 II 的最优策略为

$$Y^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13} \right).$$

对策的值

$$V = \frac{25}{13}.$$

以下再举一个工业生产的例子. 工厂中的不同设备(机床)可以看成是一个纯策略. 可以看成是对策的一方的策略. 要加工的产品(零件)可以看成是对策的另一方的策略. 对策的双方可以认为是加工单位与被加工单位. 运筹学里叫服务单元与被服务单元.

[例 3] 有一个工厂, 用三种不同的设备 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 加工三种不同的产品 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. 已知这三种机床分别加工三种产品时, 单位时间内创造的价值列表于下:

	β_1	β_2	β_3
α_1	4	-1	5
α_2	0	5	3
α_3	3	3	7

其中出现负值, 是由于设备消耗远远大于创造出来的价值. 在这样的条件下, 求出一组合理的加工方案.

解 这一问题可以化为一个矩阵对策，并且在纯策略意义下是无解的。于是进行混合扩充，假定工厂采用设备 α_1 加工产品的概率是 x_1 ，采用设备 α_2 与 α_3 的概率分别是 x_2 与 x_3 ，又，产品 β_1 、 β_2 与 β_3 被接受加工的概率分别是 y_1 、 y_2 与 y_3 。于是，完全类似于例 3，解如下的两不等式组：

$$1^\circ \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_3 \geq V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3. \end{cases}$$

以及

$$2^\circ \quad \begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 \leq V, \\ 5y_2 + 3y_3 \leq V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

对于这两不等式组，都取等号是不可能的。因为

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 = V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = V \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 = V, \\ 5y_2 + 3y_3 = V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 = V \end{cases}$$

均无正数解。因此，必须考虑有的式子取等号，有的式子不取等号，再行试算。若能求得一组解，问题便得到解决。但是，这一问题要是带着不等号去求解的话，将是很麻烦的事，不知要花多大的气力，也不一定能找到合适的解。为此，

我们先给出以下的定理.

定理 给定一个矩阵对策 Γ , 赢得矩阵为 $A_{m \times n}$, 假定对策的值是 V , 局中人 I 与 II 的最优策略分别为

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$$

与

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*).$$

当 $E(i, Y^*) < V$ 对任何的 i 都成立, 则必有

$$x_i^* = 0;$$

当 $E(X^*, j) > V$ 对任何 j 都成立, 则必有

$$y_j^* = 0.$$

证明 采用反证法. 假定对于某些 H 有

$$E(H, Y^*) < V$$

且

$$x_H^* \neq 0.$$

这时, 就用 x_H^* 乘上式, 得

$$E(H, Y^*) x_H^* < x_H^* V.$$

还因为 $k=1, 2, \dots, H-1, H+1, \dots, m$ 时, 有

$$E(k, Y^*) \leq V,$$

因此也有

$$E(k, Y^*) x_k^* \leq x_k^* V.$$

对上式两端取和, 就有

$$\sum_{i=1}^m E(i, Y^*) x_i^* < \sum_{i=1}^m x_i^* V,$$

或是

$$E(X^*, Y^*) < V \sum_{i=1}^m x_i^* = V.$$

这与 (X^*, Y^*) 是解的假设相矛盾, 因此必须是

$$x_H^* = 0.$$

同理, 可以证明定理的后一部分.

下面, 我们运用这个定理, 来解刚才的例 3.

先作如下的试验: 先考虑以下的不等式组

$$\begin{cases} 4x_1 & + 3x_3 > V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

从第二、三式消去 x_2 , 得

$$4x_1 + 3x_3 = 1,$$

此式再与试验的方程组中的第一、三式相比较, 有

$$V < 1$$

与

$$2x_1 + 4x_3 = V - 3 < 0,$$

显然这是不合理的 (因为 x_1, x_2 均为非负, 故上式为负是不可能的).

这就说明, 用第一式不取等号, 其他两式取等号, 是不允许的. 于是, 必须再改换另一组. 不妨再作如下的试验: 取

$$1^\circ \quad \begin{cases} 4x_1 & + 3x_3 = V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 > V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

以及

$$2^\circ \quad \begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 < V, \\ 5y_2 + 3y_3 = V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 = V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

由第 21 页的定理可知, 在这样的假设下, 必须有

$y_3^*=0$, 对应的 $5x_1+3x_2+7x_3>V$;

$x_1^*=0$, 对应的 $4y_1-y_2+3y_3\leq V$.

这样, 方程组 1° 与 2° 就可变成如下的方程组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} 3x_3=V, \\ 5x_2+3x_3=V \end{cases}$$

与

$$2^\circ \quad \begin{cases} 5y_2=V, \\ 3y_1+3y_2=V. \end{cases}$$

解得

$$x_2^*=0, \quad x_3^*=1, \quad y_1^*=\frac{2}{5}, \quad y_2^*=\frac{3}{5};$$

$$V=\frac{14}{2}.$$

因此, 局中人 I (工厂服务单位) 的最优策略是

$$\mathbf{X}^*=(0, 0, 1),$$

局中人 II (被加工的产品单位) 的最优策略是

$$\mathbf{Y}^*=\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right).$$

这说明, 工厂在给定的价值表的情况下, 不愿意采用设备 α_1 与 α_2 加工产品. 因为如用这两种设备加工那样的产品, 创造的价值远不能补给机器的消耗损失 (如电力使用, 机械磨损, 工人工资, 企业管理费用等). 这时, 工厂决定这些设备不投入使用是合理的.

另一方面, 从产品加工的单位来看, 他们总是希望加工单位不要价格太高, 希望付出的代价越少越好. 特别是, 他更希望某工厂给他加工某项产品后, 非但不向他要钱, 反而送给他一些副产品, 这当然是被服务的单位非常乐意的事.

这个例题充分说明, 企业管理中如何筹划设备的使用, 是一个很值得研究的问题.

[例 4] 对齐王赛马的例, 求齐王与田忌双方各自的最优策略.

解 由于齐王的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

这个对策在纯策略意义下没有解, 因此必须进行扩充. 解以下的两组不等式:

$$1^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \geq V, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq V, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \geq V, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \geq V, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 \geq V, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 \geq V; \\ \sum_{i=1}^6 x_i = 1, x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, 6. \end{array} \right.$$

$$2^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 \leq V, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 - y_5 + y_6 \leq V, \\ y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq V, \\ -y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 + y_6 \leq V, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 3y_5 + y_6 \leq V, \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 3y_6 \leq V; \\ \sum_{j=1}^6 y_j = 1, y_j \geq 0, j=1, \dots, 6. \end{array} \right.$$

对于 1° 与 2° , 都完全取等号时, 将所有式相加, 可知

$$6(x_1 + x_2 + \cdots + x_6) = 6V,$$

$$6(y_1 + y_2 + \cdots + y_6) = 6V.$$

故知

$$V = 1.$$

另一方面, 我们又知道, 双方各自选取自己的纯策略的可能性都是相等的, 从而可以观察到方程组 1° 的解为

$$x_i = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \cdots, 6;$$

2° 的解为

$$y_j = \frac{1}{6}, \quad j = 1, \cdots, 6.$$

显然既满足方程组的解, 又满足实际要求。因此, 齐王的最优策略是

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right),$$

而田忌的最优策略是

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right);$$

对策的值是 1。

由此可以看出, 在整个比赛过程中, 双方如果都不存冒险想法, 总的结局仍是齐王赢得金子。

当然, 前曾指出, 在某局势下田忌可赢得千金, 但这只有在局中人 I 先把某一策略选定之后, 再明确告诉局中人 II 他用的是那一个策略, 这样, 局中人 II 当然就可有针对性地去选取自己的策略的情况下才有可能, 而这里的混合扩充, 是在双方都不能知道对方会用那一个纯策略的情况下才有意义。

也有那样的情况,在解方程 1° 与 2° 的过程中,有时候单从解方程无法确定 x_i 与 y_j , 还必须结合具体情况讨论, 才可求得其解.

[例 5] 给定一个对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求解与值.

解 列出 1° 与 2° :

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_1 \geq V, \\ x_1 + x_2 \geq V, \\ 2x_2 \geq V; \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq V, \\ y_2 + 2y_3 \leq V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

如果在 1° 中取等号, 可知

$$1 = x_1 + x_2 = V.$$

又, 第三式与第一式相减, 得

$$x_1 = x_2,$$

故有

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

由 2° , 两式相加, 有

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 2V,$$

从而有

$$V=1,$$

又第一式与第二式相减, 得

$$y_3=y_1,$$

从而又知道

$$y_2=1-2y_1\geq 0,$$

即必须

$$y_1\leq \frac{1}{2}.$$

可是

$$y_1+y_2+y_3\leq \frac{1}{2}+y_2+\frac{1}{2}=1,$$

即

$$1\leq 1+y_2\leq 1,$$

所以必须是

$$y_2=0.$$

这就得到, 局中人 I 的最优策略为

$$X^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

局中人 II 的最优策略是

$$Y^*=\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

对策的值

$$V=1.$$

四、一种求解的简便方法

对于矩阵对策, 当赢得矩阵的阶数很大时, 求解、求值都是一件很困难的事, 有时甚至靠笔算是不可能的. 这样, 是否

可以设法给出一个普遍的方法，简化所有的求解与求值过程呢？

就一般对策而言，目前尚无更好的办法，甚至要找一个较好一点的普遍方法也是困难的。然而，对于具有某些特性的对策，简便的求值方法还是有的。下面通过一些实例，介绍对一些特殊情况的简便方法。

〔例 1〕 给定一个矩阵对策 I ，其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

求对策 I 的解与值。

解 由于 A 的第四行比第一行的对应元素都大，说明在对策的过程中，局中人 I 不会采用策略 α_1 ，这就可以看作是局中人 I 以概率为 0 选取纯策略 α_1 。又由于 A 的第三行比第二行的对应元素均大（或相等），因此又可以看作是局中人 I 以概率为 0 选取纯策略 α_2 。这说明局中人 I 最多能用到 α_3 、 α_4 、 α_5 ，因为他用这三个纯策略的任何一个收入都不会比用 α_1 、 α_2 小，从而局中人 I 在任何情况下都不会去用 α_1 与 α_2 。所以只需考虑如下的矩阵就可以了：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

另一方面，从局中人 II 的利益来看， β_3 是最不好的，肯定不能用。于是可看成是以概率为 0 选取 β_3 。而 β_2 又比 β_5

好, 因此任何情况下局中人 II 都不会舍去 β_2 而用 β_5 . 于是, 又可以看作是局中人 II 以概率为 0 选取 β_5 . 又由于 β_2 还比 β_4 好, 因此同样可以看作以概率为 0 选取 β_4 . 这样, 问题归结为考虑如下的矩阵了:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

又, 从 A_2 来看, 局中人 I 在任何情况下都不会用 α_5 . 于是余下的只是看如下的矩阵了:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

这样, 运用混合扩充的办法, 求解以下两组不等式

$$1^\circ \quad \begin{cases} 7x_3 + 4x_4 \geq V, \\ 3x_3 + 6x_4 \geq V; \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \\ x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 7y_1 + 3y_2 \leq V, \\ 4y_1 + 6y_2 \leq V; \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

当我们取等号时, 由 1° 的两式相加, 有

$$10x_3 + 10x_4 = 2V,$$

从而得到

$$V = 5.$$

相应的

$$x_3^* = \frac{1}{3}, \quad x_4^* = \frac{2}{3}.$$

同理, 解 2° 可得到

$$y_1^* = \frac{1}{2}, \quad y_2^* = \frac{1}{2}.$$

于是, 对策 Γ 的解和值分别是:

$$\mathbf{X}^* = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$$

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right);$$

$$V = 5.$$

[例 2] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

求对策 Γ 的解与值.

解 由于第一行的对应元素都不超过第三行, 因此, 局中人 I 必然要用 α_3 代替 α_1 , 于是考虑以下矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

由于在 \mathbf{A}_1 中, 第一列的对应元素都不小于第三列的对应元素, 于是, 局中人 II 必然不会采用 β_1 , 而用 β_3 代替. 所以转而考察如下矩阵:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

现在, 解下列两个不等式组:

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq V, \\ 2x_2 + 4x_3 \geq V, \\ 4x_2 + 8x_4 \geq V; \\ x_i \geq 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq V, \\ 2y_2 + 4y_3 \leq V, \\ 4y_2 + 8y_4 \leq V; \\ y_j \geq 0, \\ y_2 + y_3 + y_4 = 1. \end{cases}$$

我们先取等号, 由于 1° 中的第二式与第三式之和为

$$6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2V,$$

即

$$3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = V.$$

上式与 1° 中的第一式比较, 得

$$x_2 = 0.$$

所以

$$4x_3 = V, \quad 8x_4 = V.$$

故

$$x_3 = 2x_4.$$

从而有

$$x_3^* = \frac{2}{3}, \quad x_4^* = \frac{1}{3}.$$

于是有

$$\mathbf{X}^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

同理, 也有

$$\mathbf{Y}^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

对策的值为:

$$V = \frac{8}{3}.$$

[例 3] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求其最优策略及值.

解 对 A 来说, 由于第四列的元素比第一列及第三列的对应元素都大, 因此, 对局中人 II 来说, 肯定不会采用 β_4 的. 进一步, 也可肯定局中人 II 不会采用 β_3 的, 因 β_1 代替 β_3 与 β_4 , 会取得好的结果. 于是, 余下来就是考虑以下的矩阵了:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

又, 从 A_2 中可以看出, 局中人 I 不会采用 α_1 , 而代替 α_1 的是 α_3 ; 而 α_2 又必然会被 α_4 所代替. 因此, 余下来就是只考虑以下的矩阵:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

又由 A_3 可以看出, 局中人 II 必然要用 β_1 , 而不用 β_2 . 从而, 余下的只是以下的矩阵

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

再从 A_4 又可以看出来, 局中人 I 会用 α_3 , 而不去用 α_4 . 这样, 最后就找到了最优策略是

$$X^* = (0, 0, 1, 0),$$

$$Y^* = (1, 0, 0, 0).$$

对策的值

$$V=2.$$

这个例子表明, 先前讲的纯策略不扩充时的解, 只是扩充后的一个特例, 只不过是以概率为 1 而取得了那个纯策略, 以概率为 0 选取其他的纯策略.

以下再介绍一种方法.

在一个矩阵对策中, 把矩阵的元素普遍加上一个数, 可得对策的解不变, 只是值增了一个数. 我们还是通过一个例子来加以说明.

[例 4] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

求对策的解与值.

解 按前述方法, 就得解如下的两不等式组:

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq V, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq V, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq V, \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \leq V, \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \leq V, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leq V, \\ y_j \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

由这两组不等式, 我们取等号, 可解得

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13},$$

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13},$$

$$V = -\frac{1}{13}.$$

如果把这一问题换成另一问题, 考虑另一个矩阵对策 Γ' , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

这时, 解如下的两不等式组

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \begin{cases} 2x_1 \geq V, \\ 4x_2 \geq V, \\ 3x_3 \geq V; \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \\ 2^\circ \quad & \begin{cases} 2y_1 \leq V, \\ 3y_2 \leq V, \\ 4y_3 \leq V; \\ y_j \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

解这两组不等式, 我们取等号, 由 1° 有

$$12x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 6V + 3V + 4V,$$

可知 $V = \frac{12}{13}$. 于是很快就可解得

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13},$$

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13},$$

$$V = \frac{12}{13}.$$

可以看到,这组解与先前那组解是完全一样的,只是值差了一个1. 其实,后一个对策的矩阵与前一个矩阵之间的差别,在于把前面的矩阵的每个元素都加了1. 这就告诉我们,可以在矩阵的每一元素普遍加上一个数,用以简化计算.

这一方法可以推广到一般情形,这就是下面的定理.

定理 给定两个矩阵对策:

$$I_1 = \langle S_1, S_2, I, I; (a_{ij}) \rangle,$$

$$I_2 = \langle S_1, S_2, I, II; (a_{ij} + a) \rangle,$$

其中 a 是一个常数,则两个对策的解不变,其值相差一个 a ,即

$$V_2 = V_1 + a,$$

其中 V_1 与 V_2 分别是对策 I_1 与 I_2 的值.

证明 设给定 I_1 的矩阵 A_1 为

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对策 I_2 的矩阵为

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} + a & a_{12} + a & \cdots & a_{1n} + a \\ a_{21} + a & a_{22} + a & \cdots & a_{2n} + a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + a & a_{m2} + a & \cdots & a_{mn} + a \end{pmatrix}.$$

于是, $E_2(X, Y)$ 有

$$\begin{aligned} E_2(X, Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + a) x_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a x_i y_j. \end{aligned}$$

又因为有下列式成立

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a x_i y_j &= a \cdot \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i y_j \right) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^m \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j \right) = a \cdot \sum_{i=1}^m x_i = a,\end{aligned}$$

因此有

$$E_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + a.$$

[例 5] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

求解及值.

解 对于 \mathbf{A} 来说, 含有最多的元素是 2. 于是, 根据上定理, 对 \mathbf{A} 的所有元素减去 2, 即得

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

从而转化为它的等价问题. 对 \mathbf{A}_1 , 只需解如下不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 & \geq V_1, \\ -4x_1 + 2x_2 & \geq V_1, \\ 2x_1 + 4x_3 & \geq V_1; \\ x_i & \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 & \leq V_1, \\ -3y_1 + 2y_2 & \leq V_1, \\ 4y_3 & \leq V_1; \\ y_j & \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 & = 1. \end{cases}$$

解这两组不等式, 我们知道取等号是不行的, 必须取如下的两组

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad & \begin{cases} x_1 - 5x_2 = V_1, \\ -4x_1 + 2x_2 = V_1, \\ 2x_1 + 4x_3 > V_1; \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \\
 2^\circ \quad & \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 < V_1, \\ -3y_1 + 2y_2 = V_1, \\ 4y_3 = V_1; \\ y_i \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

由 1° 与 2° , 当然有两个特定的解为

$$x_1 = 0, \quad y_3 = 0,$$

于是问题变成了解如下的两个方程组

$$\begin{cases} -3x_2 = V_1, \\ 2x_2 = V_1 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = V_1, \\ 4y_3 = V_1. \end{cases}$$

由 $4y_3 = V_1$ 可知 $V_1 = 0$ 、 $x_2 = 0$, 所以有

$$x_3 = 1,$$

以及

$$3y_1 = 2y_2.$$

所以又有

$$y_1 = \frac{2}{5}, \quad y_2 = \frac{3}{5}.$$

最后得到解为

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=1;$$

$$y_1=\frac{2}{5}, \quad y_2=\frac{3}{5}, \quad y_3=0.$$

而值 V 应当是

$$V_1+2=0+2=V,$$

即对策的值为 $V=2$.

[例 6] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

求解及值.

解 可将 A 变成

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

解两不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_2 + x_3 \geq V_1, \\ x_1 + 2x_3 \geq V_1, \\ 2x_1 + x_2 \geq V_1, \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} y_1 + 2y_3 \leq V_1, \\ 2y_1 + y_3 \leq V_1, \\ y_1 + 2y_2 \leq V_1, \\ y_i \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

我们先取等号. 将 1° 的三个式子相加, 可得 $V_1=1$. 于是又可解出:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

用同样的方法,又可得到

$$y_1 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{1}{3}.$$

故有原来对策的值为

$$V = V_1 + 1 = 2.$$

[例 7] 有两个乒乓球队, 双方各自出三个队员, 对甲队来说赢得情况是

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

求这个对策的解.

解 对这个对策, 可以考虑如下的矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

解以下的两不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_1 & \geq V_1, \\ 4x_2 & \geq V_1, \\ 3x_3 & \geq V_1; \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 2y_1 & \leq V_1, \\ 3y_2 & \leq V_1, \\ 4y_3 & \leq V_1; \\ y_1 + y_2 + y_3 & = 1, \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0. \end{cases}$$

由 1° 可知, 当取等号时, 有

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{4} + \frac{V_1}{3} = 1.$$

从而解得:

$$V_1 = \frac{12}{13},$$

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13}.$$

同理, 可求得

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13}.$$

所以, 最优解为

$$X^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13} \right),$$

$$Y^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13} \right);$$

对策的值为

$$V_1 = \frac{12}{13}.$$

再将 1 加到 V_1 上, 则得原对策的值为

$$V = 1 + V_1 = 1 + \frac{12}{13} = \frac{25}{13}.$$

此解与第 17 页例 2 的结论完全一致, 可见采用这方法可简化计算.

五、线性规划法

我们已经知道, 对于扩充后的矩阵对策来说, 求最优解就是去解下述两不等式组:

$$1^{\circ} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq V, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

$$2^{\circ} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq V, \quad (i=1, 2, \dots, m);$$

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

这里的 V 是:

$$V = \max_{X^* \in S_1^*} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i,$$

也有如下的

$$V = \min_{Y^* \in S_2^*} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j.$$

如果作如下的变换: 对于 1° 来说,

$$x'_i = \frac{x_i}{V}, \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

于是, 1° 就成为:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_{i=1}^m x'_i = \frac{1}{V},$$

$$x'_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

这样, 就把问题归结为求一组满足约束条件:

$$1^{\circ'} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$x'_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

的解 $x'_i^* (i=1, 2, \dots, m)$, 使得目标函数

$$S(X'^*) = \sum_{i=1}^m x'_i^*$$

达到最小.

同样, 对于局中人 II 来说, 求最优策略问题可化为求满足约束条件:

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1, \quad (i=1, 2, \dots, m); \\ & y_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

的一组解 y_j^* , 使得目标函数

$$S(Y^*) = \sum_{j=1}^n y_j^*$$

达到最大. 这里

$$y_j = \frac{y_j}{V}, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$V = \min_{Y \in S_1} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j.$$

我们知道, 这就是线性规划的典型问题.

[例 1] 给定矩阵对策的赢得矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 用刚才讲过的理论, 把它化为以下的两个线性规划问题:

$$i) \quad \begin{cases} x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3 \geq 1, \\ 3x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 \geq 1, \\ 3x'_1 + x'_2 + 2x'_3 \geq 1; \\ x'_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3. \end{cases}$$

解这一组不等式, 使得目标函数

$$S(X'^*) = x'_1 + x'_2 + x'_3$$

达到极小.

解 i), 得到一组解

$$x_1^* = \frac{1}{7}, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = \frac{2}{7};$$

$$S(\mathbf{X}^*) = \frac{1}{7} + 0 + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} = \frac{1}{V}.$$

所以对策的值是

$$V = \frac{7}{3}.$$

又代回原式, 求得

$$x_1^* = V x_1' = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$x_2^* = V x_2' = \frac{7}{3} \times 0 = 0,$$

$$x_3^* = V x_3' = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{3}.$$

因此, 局中人 I 的最优策略是

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right).$$

同样, 解另一组不等式

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} y_1' + 3y_2' + 3y_3' \leq 1, \\ 4y_1' + 2y_2' + y_3' \leq 1, \\ 3y_1' + 2y_2' + 2y_3' \leq 1; \\ y_j' \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

解得

$$y_1^* = \frac{1}{7}, \quad y_2^* = \frac{1}{7}, \quad y_3^* = \frac{1}{7}.$$

目标函数

$$S(\mathbf{Y}^*) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} = \frac{1}{V},$$

所以有

$$V = \frac{7}{3}.$$

又因为

$$y_1^* = V \cdot y_1' = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$y_2^* = V \cdot y_2' = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$y_3^* = V \cdot y_3' = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

因此局中人 II 的最优策略为

$$Y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

综合上述结果, 即知给定这个矩阵对策的解是

$$X^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right),$$

$$Y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

$$V = E(X^*, Y^*) = \frac{7}{3}.$$

六、矩阵对策的图解法

这里, 我们通过例题, 介绍一种求矩阵对策最优策略的图解法. 理论方面的证明, 本书从略.

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ , 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 9 & 10 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 假定局中人 I 采用的混合策略为

$$\mathbf{X} = (x, 1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

于是, 当局中人 II 采用 β_1 时, 局中人 I 的赢得是

$$2x + 9(1-x) = 9 - 7x;$$

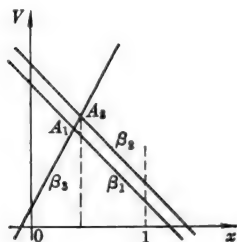
如果局中人 II 采用 β_2 时, 局中人 I 的赢得是

$$3x + 10(1-x) = 10 - 7x;$$

如果局中人 II 采用 β_3 时, 局中人 I 的赢得是

$$12x + 2(1-x) = 2 + 10x.$$

现在, 用所得的三个方程, 于区间 $[0, 1]$ 上作出三条直线:



显然, 对局中人 I 来说, 他希望取到尽可能大的值. 而在交点 A_1 与 A_2 处, 显然 A_2 处取到的 V 比 A_1 处要大. 实际上, 局中人 I 的最优策略是由以下方程组所得到:

$$\begin{cases} 9 - 7x = V, \\ 2 + 10x = V. \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

解上方程组, 得

$$x = \frac{7}{17}, \quad V = 6\frac{2}{17}.$$

于是, 局中人 I 的最优策略是

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17} \right).$$

对局中人 II 来说, 由于 β_1 对应的直线完全落于 β_2 对应

的直线之下，因此取 β_2 的概率就是 0，即 $y_2=0$ 。所以，求局中人 II 的最优策略，可以由以下的矩阵中求得：

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

在不等式组中，我们取等号，则有

$$2y_1 + 12(1 - y_1) = 6 \frac{2}{17},$$

$$0 \leq y_1 \leq 1.$$

于是，求得

$$y_1 = \frac{10}{17}.$$

从而有

$$y_3 = \frac{7}{17}.$$

所以，局中人 II 的最优策略是

$$Y^* = \left(\frac{10}{17}, 0, \frac{7}{17} \right).$$

[例 2] 给定矩阵对策 I ，矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值。

解 假定局中人 I 的混合策略为

$$X = (x, 1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

于是，当局中人 II 分别采取 β_1 , β_2 与 β_3 时，局中人 I 的赢得分别是

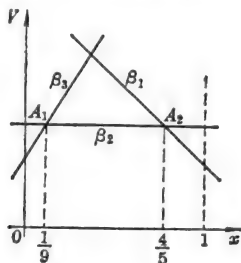
$$2x + 7(1-x) = 7 - 5x \geq V,$$

$$3x + 3(1-x) = 3 \geq V,$$

$$11x + 2(1-x) = 2 + 9x \geq V;$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

我们取等号, 分别划出三条直线如下:



很快就得到

$$x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5} \right].$$

说明 x 为 $\left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5} \right]$ 内任意点, 都是局中人 I 的最优策略, 即

$$X^* = (x, 1-x), \quad x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5} \right].$$

而局中人 II 的最优策略, 应由下方程组求得:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 11(1-y_1-y_2) \leq 3, \\ 7y_1 + 3y_2 + 2(1-y_1-y_2) \leq 3. \end{cases}$$

对此方程组取等号, 可解得:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{31}{31} = 1, \quad y_3 = 0.$$

于是, 局中人 II 的最优策略是

$$Y^* = (0, 1, 0).$$

由于 $y_2 = 1$, 可知有 $3 \cdot 1 \leq V$, 又由第一个方程组中的第 2 个式子, 可知 $3 \geq V$, 于是对策的值 $V = 3$.

从刚才的两个例题可以看到, 对于 $A_{2 \times m}$ 的矩阵, 方法是一样的. 这里仅就 $A_{m \times 2}$ 或 $A_{2 \times m}$ 的情况给出了说明, 至于一般形式的 $A_{m \times n}$, 这里不加讨论, 因为高于三维空间的图是画不出的.

练 习 题

1. 求下列矩阵的 $\min_j \max_i a_{ij}$ 以及 $\max_i \min_j a_{ij}$:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 求给定矩阵对策的最优策略与值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 31 \\ 30 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 12 \\ 10 & 32 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 20 & 10 \end{pmatrix};$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & 19 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix};$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. 假定要用某台机床加工大、中、小三种零件, 每一种工件都有两道工序, 现在要考虑如何进行加工, 能使消耗费用最省?

这个问题可以看成是一个矩阵对策, 假定局中人 I 是机床, 局中人 II 是加工零件. 局中人 I 有两个策略 x_1 与 x_2 :

x_1 : 每一个工件两道工序都加工完后, 再加工另一个工件;

x_2 : 将所有工件的第一道工序都加工完, 再加工所有工件的第二道工序,

局中人 II 有三个策略.

y_1 : 加工大工件;

y_2 : 加工中等工件;

y_3 : 加工小工件.

按如下的矩阵表示 I 的赢得:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ y_1 \begin{pmatrix} -100 & -200 \end{pmatrix} \\ y_2 \begin{pmatrix} -85 & -98 \end{pmatrix} \\ y_3 \begin{pmatrix} -95 & -90 \end{pmatrix} \end{array}$$

求这个对策的值并求最优策略.

4. 设甲乙两国进行乒乓球团体赛, 每队由三个人组成一个队参加比赛. 甲的人员可组成 4 个队, 乙的人员可组成 3 个队. 根据以往的比赛记录, 可知各种组成队法, 相遇会反映在下面的矩阵里(代表甲的得分):

$$\begin{array}{c} \text{第一队} \quad \text{第二队} \quad \text{第三队(乙)} \\ \text{(甲)} \begin{array}{l} \text{第 1 队} \\ \text{第 2 队} \\ \text{第 3 队} \\ \text{第 4 队} \end{array} \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -9 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

问双方由哪个队上场是不冒风险的作法?

5. 求给定矩阵对策在混合扩充后的最优策略和值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 18 & 6 & -12 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 13 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(注意: (7)与(8)的解之间有何关系)

6. 用简便方法, 求给定矩阵对策的解与值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 4 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. 某厂加工一批控制柜, 想在包装、发运上节省些时间. 按往常情况下可有四种包装方法, 分①②③④四种; 运输上也有三种运输的方法, 分⊖⊖⊖三种. 由于包装的简易关系, 运输的损坏程度, 统计规律可见下表

	⊖	⊖	⊖
①	2	3	4
②	1	-7	-8
③	-1	16	-9
④	0	-3	5

有的人向调度提议采用③种包装法, 希望能得到⊖种运输方法. 可是调度没有采纳这种意见, 而是采用了①的包装法. 问①包装法好的理由何在?

8. 证明下列各题:

(1) 如果给定对策的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

求证: 1^* 对策的值是 0; 2^* 如 (X^*, Y^*) 是解, 那么 (Y^*, X^*) 也是其解.

(2) 把上题的结论推广到一般: 如果赢得矩阵 A 是主对角线为 0 的反对称矩阵, 即 $a_{ii}=0$, 当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = -a_{ji}$, 求证: 1^* 对策的值是 0; 2^* 如 (X^*, Y^*) 是解, 那么 (Y^*, X^*) 也是其解.

(3) 给定两个对策, 其赢得矩阵分别为 $A_{m \times n} = (a_{ij})$ 和 $B_{m \times n} = (ka_{ij})$, 其中 $k > 0$. 证明: 这两个对策具有相同的最优策略, 且它们的值之间具有关系 $kV_A = V_B$.

9. 用线性规划的方法, 求下列矩阵对策对应的对策的解与值:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. 用图解法, 求给定矩阵对策的解与值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. 证明下列各题:

(1) 给定一矩阵对策, 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

证明这一对策有解, 且其解是唯一确定的; 然后求出其解与值. 其中 $a > b > c > 0$.

(2) 给定一矩阵对策, 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

证明这一对策有唯一解. 其中 $a > 0$.

(3) 给定两个矩阵对策, 其赢得矩阵分别为

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这两对策是否有相同的解? 为什么?

(4) 一个 m 阶方阵, 它的每一行与每一列的元素都是由 1 到 m 的正整数组成的, 这样的矩阵称为拉丁方阵. 证明: 如果一个矩阵对策的赢得矩阵为 m 阶拉丁方阵时, 这一对策的值就是 $V = \frac{m+1}{2}$.

12. 设 K 方用两个步兵营去夺取 C 方的某个据点, 每一个营都可以沿道路 I 与 II 中任何一条去攻取. C 方用三个步兵营守自己的据点, 可以用任何方式将三个营分配于道路 I 与 II 上去. 如果在道路上 K 方一个营与 C 方一个营相遇, 经过战斗, 这时 K 方胜 C 方占领据点的概率为 p_1 , 败于 C 方而撤退的概率为 $1-p_1$. 如果在道路上 K 方两个营与 C 方两个营相遇开战, 这时 K 方胜 C 方攻取据点的概率为 p_2 , 败的概率为 $1-p_2$. 如果 K 方被 C 方三个营在同一处挡住, 则 K 方是当然败退. 这样一来, K 方有三个策略: K_1 ——两个营都沿 I 攻 C , K_2 ——两个营都沿 II 攻 C , K_3 ——每条道路上各配一个营攻. 而 C 方有四个策略, C_1 ——全部兵力守在 I 上, C_2 ——全部兵力守在 II 上, C_3 ——在 I 上部一个营, 在 II 上部两个营, C_4 ——在 I 上部两个营, 在 II 上部一个营. 于是对策的

矩阵为

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ K_1 & 0 & 1 & 1 & p_2 \\ K_2 & 1 & 0 & p_2 & 1 \\ K_3 & 1 & 1 & p_1 & p_1 \end{matrix}$$

求双方的最优策略以及对策的值。

19. K 方派出两架轰炸机去袭击 C 方的某个设施, 每一架轰炸机都带有巨大的杀伤武器。只要有一架飞到目的地, 这个设施就肯定被摧毁。轰炸机可以从 I, II, III 三个方向任选一个方向接近目标。 C 方可以将高射炮配置在三个方面中的任何一个方面。 K 方有两个策略: K_1 ——两轰炸机各从一方接近目标; K_2 ——两架轰炸机从同一个方向接近目标。 C 方有三个策略, C_1 ——三个方面各配置一门炮; C_2 ——一个方面配置两门炮, 另一个方面配置一门炮, 第三个方面不配置炮; C_3 ——三门炮全配置在同一个方面上。其对策矩阵如下:

$$\begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 \\ K_1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ K_2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$$

求双方的最优策略。

练习题答案

1. (1) $\min_j \max_i a_{ij} = 2, \max_i \min_j a_{ij} = 0$; (2) $\min_j \max_i a_{ij} = 3, \max_i \min_j a_{ij} = 1$; (3) $\min_j \max_i a_{ij} = 2, \max_i \min_j a_{ij} = 0$; (4) $\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = 1$. 2. (1) $(\alpha_1, \beta_2), V=10$; (2) $(\alpha_1, \beta_1), V=11$; (3) $(\alpha_1, \beta_1), V=4$; (4) $(\alpha_2, \beta_3), V=3$; (5) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), V=1$; (6) $(\alpha_1, \beta_1), V=1$; (7) $(\alpha_1, \beta_3), V=2$; (8) $(\alpha_1, \beta_3), V=2$. 3. $V=-100, (x_1, y_1)$. 4. 甲方第 2 队, 乙方第二队. 5. (1) $X^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), V=1$; (2) $X^* = (0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}), Y^* = (0, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}), V=\frac{2}{3}$; (3) $X^* = (\frac{15}{31}, \frac{6}{31}, \frac{10}{31}), Y^* = (\frac{15}{31}, \frac{10}{31}, \frac{6}{31}), V=\frac{1}{31}$; (4) $X^* = (0, 0, 1), Y^* = (0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}), V=0$; (5) $X^* = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}), Y^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), V=1$; (6) $X^* = (0, 1, 0), Y^* = (0, 0, 1, 0, 0), V=2$; (7) $X^* = (\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}), Y^* =$

- $\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), V=3\frac{11}{13}$; (8) $X^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), Y^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right),$
 $V=3\frac{11}{13}$. 6. (1) $X^*=(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), Y^*=(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), V=$
 $4\frac{1}{2}$; (2) $X^*=(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), Y^*=(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}), V=\frac{16}{3}$; (3) $X^*=(\frac{2}{5},$
 $\frac{3}{5}, 0), Y^*=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), V=4$; (4) $X^*=(1, 0, 0), Y^*=(1, 0, 0, 0), V=0$.
 9. (1) $X^*=(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}), Y^*=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), V=\frac{9}{2}$; (2) $X^*=(0, \frac{1}{3},$
 $\frac{2}{3}), Y^*=(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0), V=\frac{2}{3}$. 10. (1) $X^*=(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}), Y^*=(0, \frac{9}{11},$
 $\frac{2}{11}), V=\frac{49}{11}$; (2) $X^*=(x, 1-x),$ 其中 $\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{3}{5}, Y^*=(0, 1, 0), V=4$.
 12. $X^*=(\frac{1-p_1}{p_2-2p_1+2}, \frac{1-p_1}{p_2-2p_1+2}, \frac{p_2}{p_2-2p_1+2}), Y^*=(\frac{1}{2(2+p_2-2p_1)},$
 $\frac{1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1+p_2-2p_1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1+p_2-2p_1}{2(2+p_2-2p_1)}), V=\frac{p_2-p_1+1}{p_2-2p_1+2}$.
 13. $X^*=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), Y^*=(0, 1, 0), V=\frac{2}{3}$.